

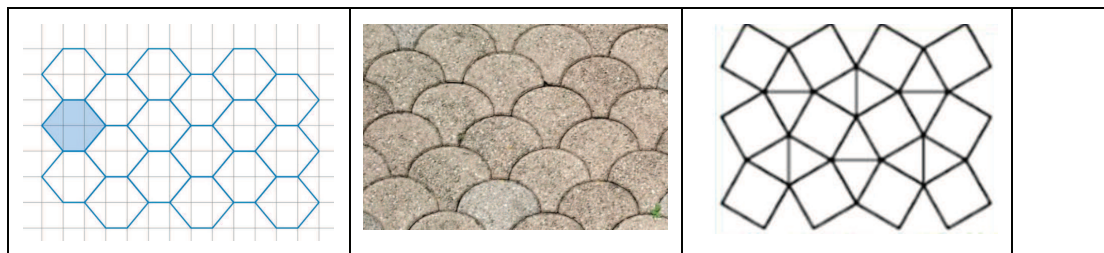
Les pavages

Niveau	Cycle 4 Cette séquence est plus spécifiquement destinée aux élèves de 4 ^e ou de 3 ^e . Cependant, certaines activités (manipulation, verbalisation) sont accessibles dès la classe de 5 ^e .
Connaissances et compétences travaillées	Connaissances et compétences mathématiques - Manipuler des formes et des outils (découpage de gabarits, reproduction sur papier calque, utilisation de tampons encreurs, etc.) et comprendre comment ils permettent de modéliser des notions mathématiques abstraites. - S'exprimer par écrit et par oral en utilisant le vocabulaire adéquat pour décrire une situation géométrique ou pour formuler une conjecture. - Raisonner sur des figures et des transformations géométriques. S'initier à la rédaction d'une démonstration. - Réaliser des constructions géométriques et appliquer des transformations pour réaliser un pavage du plan. Connaissances et compétences transversales - Observer et analyser une œuvre d'art. - Faire preuve de créativité et de rigueur pour construire un pavage.
Modalités de travail	Travail individuel ; travail en groupes.
Matériel nécessaire	Papier quadrillé, papier à dessin blanc, papier calque, tampons encreurs, règle, compas, ciseaux, enveloppes, attaches parisiennes.
Vocabulaire	Tout le lexique de la géométrie plane. Motif, gabarit.

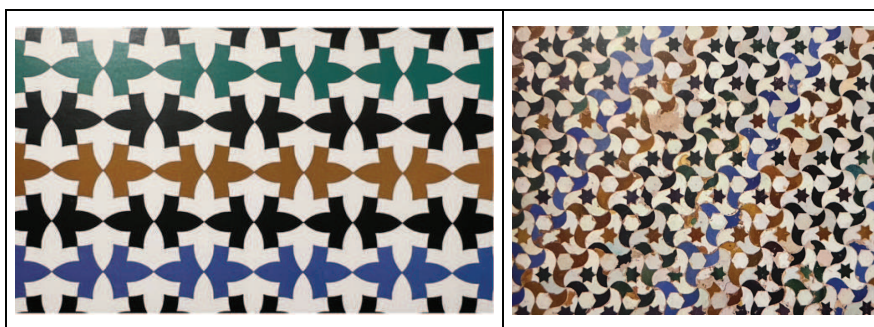
Séance 1 (au moins 45 minutes)

Qu'est-ce qu'un pavage ?

Un pavage est un recouvrement du plan obtenu par la répétition dans deux directions indépendantes d'un motif de base, sans qu'il y ait de trou ou de chevauchement. C'est le principe du carrelage.

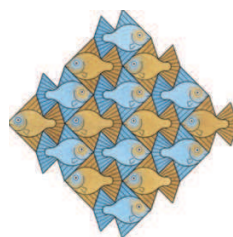
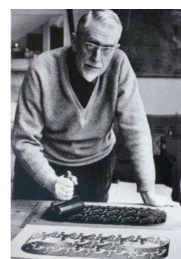


Les pavages sont très présents dans l'art mudéjar (Alhambra de Grenade).



Ils ont également inspiré des peintres contemporains, comme Maurits Cornelis Escher.

Maurits Cornelis Escher est né le 17 juin 1898 à Leeuwarden en Hollande et est décédé en 1972. Pendant toute sa vie, il s'avoua incompetent en mathématiques, tout en étant, dès son plus jeune âge, intrigué par les figures et les transformations géométriques. Manifestant également un grand attrait pour les arts, il consacra sa vie à l'art graphique. Escher a produit plus de 150 pavages en couleur, dans lesquels s'imbriquent des créatures qui rampent, nagent ou planent, emplissant tout le plan sans trou ni recouvrement.



Les chevaux

Les oiseaux

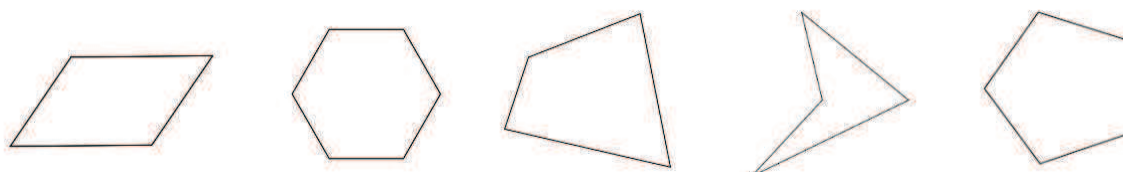
Les poissons

Les têtards

Peut-on paver le plan à partir de n'importe quelle figure de base ?

Activité 1

Les élèves découpent des gabarits ou utilisent des calques des figures ci-dessous et essaient, à partir de manipulations, de paver le plan à partir de ces gabarits en leur appliquant des transformations (symétries, rotations, translations).



On voit aisément qu'on peut paver le plan à partir d'un parallélogramme (et donc aussi d'un losange, d'un rectangle, d'un carré).

En utilisant une symétrie bien choisie, montrer qu'on peut passer d'un triangle quelconque à un parallélogramme et en déduire qu'on peut paver le plan à partir d'un triangle quelconque.

Activité 2

En admettant que tous les angles d'un polygone **régulier** à n côtés valent $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, et en étudiant le « recollement » des angles à chaque sommet pour réaliser un pavage, démontrer que les seuls polygones réguliers à partir desquels on peut paver le plan sont :

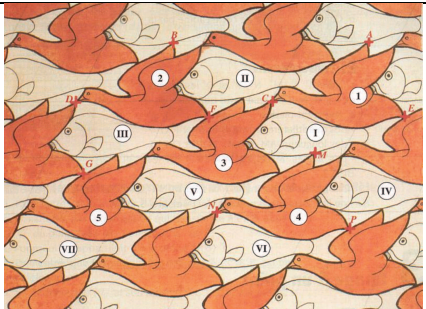
- le triangle équilatéral ;
- le carré ;
- l'hexagone.

Séance 2 (40 minutes)

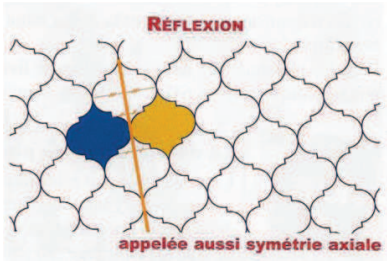
Activité 1 : comment analyser un pavage ?

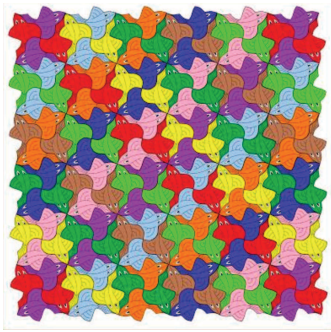
Sont détaillées ci-dessous les différentes étapes à suivre pour analyser un pavage

1. Repérer deux « plus petites » translations indépendantes qui conservent le pavage. Si le dessin est complexe, ces translations apparaissent mieux en coloriant des motifs similaires qui se présentent dans la même direction. Plusieurs couples de translations sont ainsi repérables.
2. Tracer alors un parallélogramme de base.

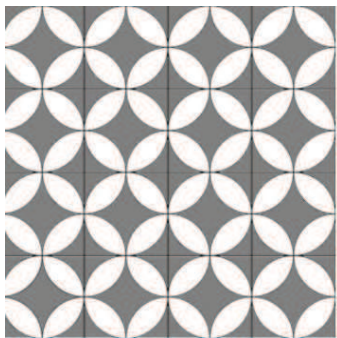
	Dans le pavage ci-contre, nommer une transformation qui fait passer l'oiseau 1 sur l'oiseau 2 et une transformation qui fait passer l'oiseau 1 sur l'oiseau 3 ? Quelles sont les images du poisson I par chacune de ces transformations ? Tracer un parallélogramme de base.
--	---

3. Repérer les axes de symétrie et les centres de symétrie, et éventuellement les centres et les angles des rotations qui laissent le pavage invariant.

 Figure 1	Le pavage ci-contre admet deux familles de centres de symétrie. Compléter en représentant d'autres centres de symétrie. Identifier deux « plus petites » translations qui conservent le pavage et tracer un parallélogramme de base.
 Figure 2	Vérifier que le pavage ci-contre admet une deuxième famille d'axes de symétrie que l'on dessinera. Vérifier qu'il admet aussi deux familles de centres de symétrie que l'on représentera.

 Figure 3	Vérifier que le pavage ci-contre est invariant par deux familles de quarts de tours dont on précisera les centres.
---	---

4. Isoler un motif minimal.

	Dans le pavage suivant, identifier un motif élémentaire et préciser les transformations à lui appliquer pour construire le pavage.
--	---

Séance 3 (au moins 45 minutes)

Comment passer de la manipulation à la verbalisation, puis à l'abstraction ?

La manipulation et l'observation sont inhérentes à l'activité mathématique, mais elles ne suffisent pas. Dès le cycle primaire, les élèves apprennent à utiliser le vocabulaire mathématique adéquat pour décrire ce qu'ils observent et pour formuler des conjectures : c'est la verbalisation.

Au cycle préparatoire, il s'agit d'accéder à l'abstraction, qui est le cœur des mathématiques. Progressivement, les élèves apprennent à quitter le monde des objets concrets (par exemple les motifs obtenus par découpage, décalquage ou encrage) et des transformations effectives (par exemple faire tourner un papier calque autour d'une attache parisienne) pour accéder au monde abstrait des figures et des transformations géométriques. Au lieu de manipuler et d'observer, ils raisonnent et accèdent à la vérité par le biais de la démonstration.

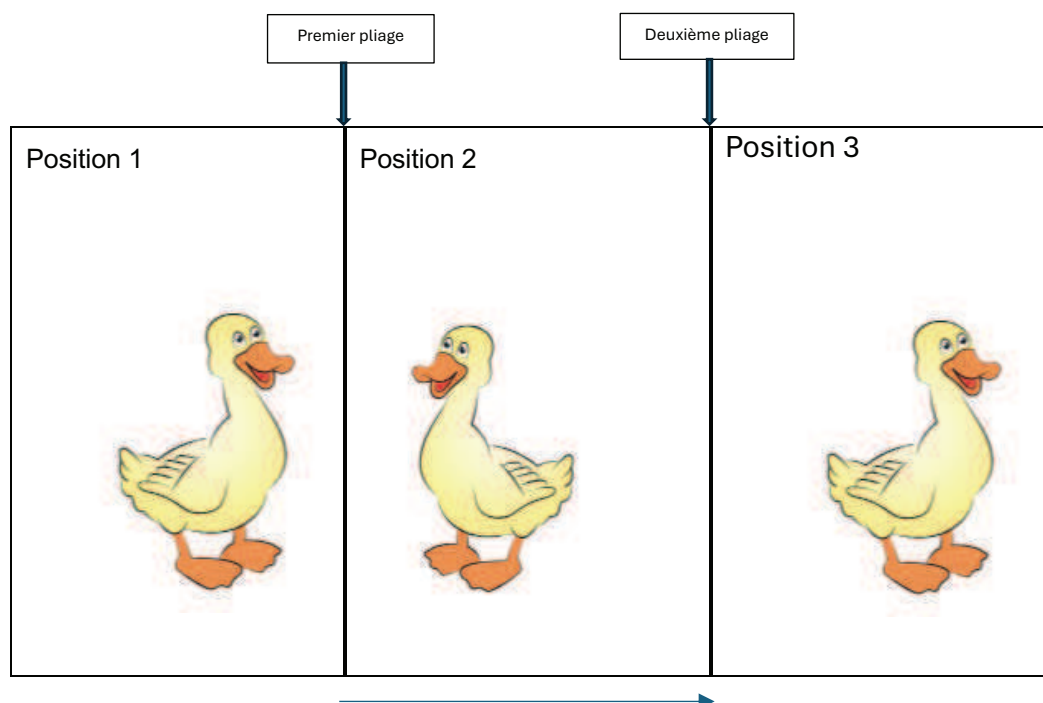
Dans ce qui suit, nous décrivons ce passage de la manipulation à la démonstration sur deux exemples de composition de transformations.

Les deux premières phases (manipulation et verbalisation) peuvent être proposées à tous les élèves, dès le cycle primaire. La troisième phase (validation d'une conjecture par une démonstration) concerne uniquement les élèves du cycle préparatoire.

Composition de deux réflexions d'axes parallèles

Phase 1 : manipulation

Les élèves disposent d'une feuille de papier blanc et d'un tampon encreur. Ils commencent par plier la feuille de papier en trois dans le sens de la hauteur. Ils impriment le motif et plient deux fois la feuille.



Phase 2 : verbalisation

À l'issue d'un débat organisé par l'enseignant, les élèves observent qu'à la suite du premier pliage, le canard a été retourné et qu'à la suite du deuxième pliage, le canard se retrouve dans sa position initiale.

Progressivement, et sous la conduite de l'enseignant, ils identifient la transformation qui fait passer le canard de la position 1 à la position 3 comme étant une translation. Ils comparent le vecteur de cette translation au vecteur représenté par la flèche verte.

Ils émettent donc la conjecture suivante :

« Effectuer successivement deux symétries axiales d'axes parallèles, le deuxième se déduisant du premier dans une translation de vecteur $\vec{u}$, revient à effectuer la translation de vecteur $2\vec{u}$. »

Ce résultat sera admis par les élèves du cycle primaire.

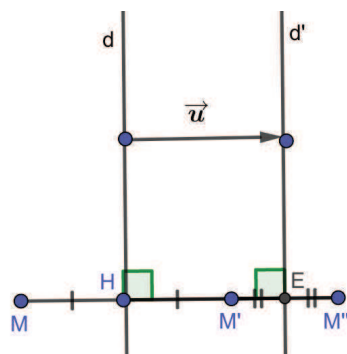
Phase 3 : abstraction et validation de la conjecture par une démonstration

Cette phase concerne uniquement les élèves du cycle préparatoire

L'abstraction commence par le fait qu'on applique les transformations, non pas à un motif comme le canard, mais à un point M générique.

On note M' son image dans la réflexion d'axe d et M'' l'image de M' dans la réflexion d'axe d'

On démontre que M'' est l'image de M dans la translation du vecteur $2\vec{u}$.



Démonstration

M' est le symétrique de M par rapport à la droite d .

M'' est le symétrique de M' par rapport à la droite d' .

On montre d'abord que les trois points M , M' et M'' sont alignés.

Puis

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'E}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{MM''} = 2(\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{M'E}) = 2\overrightarrow{HE} = 2\vec{u}.$$

Lien avec les pavages

Si un pavage admet deux familles d'axes de symétrie parallèles (comme dans la figure 2), il est possible de le construire à partir d'un motif élémentaire en effectuant uniquement des réflexions.

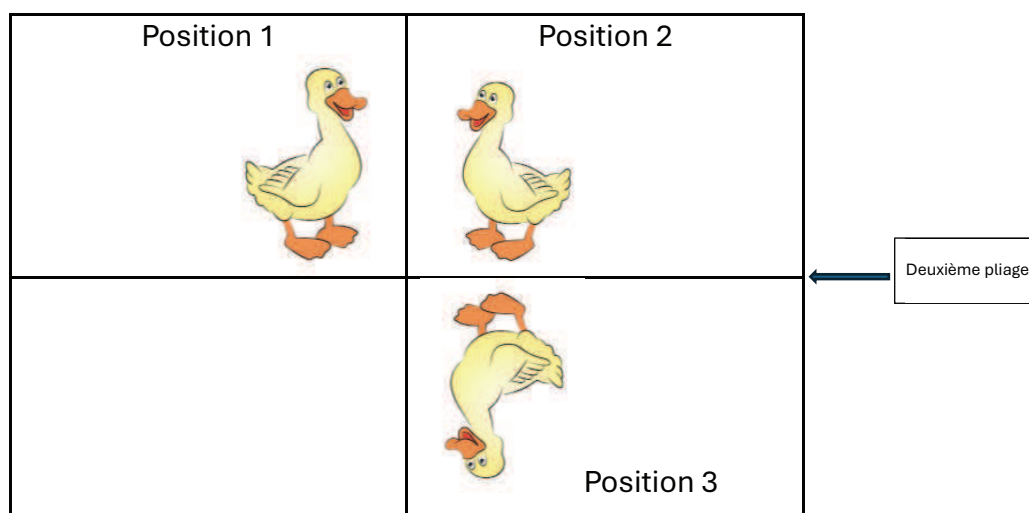
Composition de deux réflexions d'axes perpendiculaires

Phase 1 : manipulation

Les élèves disposent d'une feuille de papier blanc et d'un tampon encreur. Ils commencent par plier la feuille de papier en deux dans le sens de la hauteur et en deux dans le sens de la largeur.

Ils impriment le motif et plient deux fois la feuille, une fois dans le sens de la hauteur et une fois dans celui de la largeur.

Quelle transformation permet de passer de la position 1 à la position 3 ?



Phase 2 : verbalisation

À l'issue d'un débat organisé par l'enseignant, les élèves observent qu'à la suite du premier pliage, le canard a été retourné. À la suite du deuxième pliage, il se trouve inversé par rapport à sa position initiale.

Progressivement, et sous la conduite de l'enseignant, ils identifient la transformation qui fait passer le canard de la position 1 à la position 3 comme étant une symétrie centrale (ou demi tour). Ils sont invités

à utiliser un papier calque pour reproduire le motif en position 1 et une attache parisienne pour le faire tourner d'un demi-tour et vérifier qu'il coïncide avec le motif en position 3

Ils émettent donc la conjecture suivante :

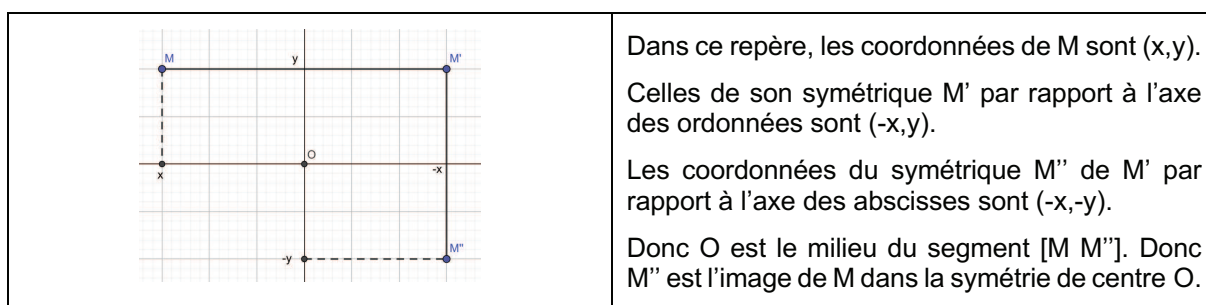
« Effectuer successivement deux réflexions d'axes perpendiculaires revient à effectuer la symétrie centrale (encore appelée demi-tour) par rapport au point d'intersection de leurs axes.»

Phase 3 : validation de la conjecture par une démonstration

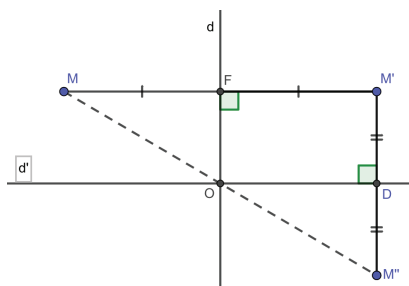
Cette phase concerne uniquement les élèves du cycle préparatoire

On choisit un repère du plan :

L'axe des abscisses est placé sur la droite d ; l'axe des ordonnées est placé sur la droite d' , qui est perpendiculaire à d . L'origine du repère est le point d'intersection des deux droites.



Les élèves mémorisent le schéma suivant :



Lien avec les pavages

Si un pavage admet deux familles de centres de symétrie (comme dans la figure 1), il est possible de le construire à partir d'un motif élémentaire en effectuant uniquement des symétries centrales.

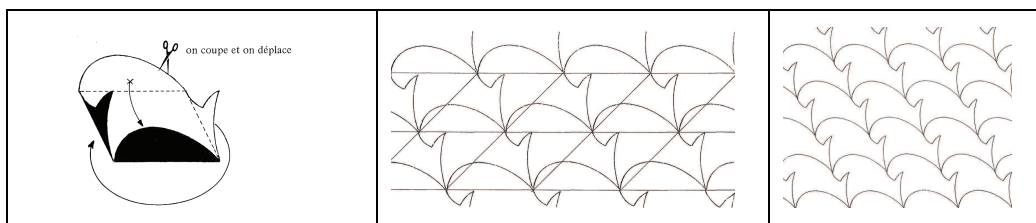
Séance 3 (40 minutes)

Comment construire un pavage ?

a. Première méthode : le principe de déformation d'un pavé

On part d'une figure qui pave le plan et on la déforme de manière à ce que ce qui est enlevé d'un côté est ajouté au côté parallèle (principe de compensation).

Ici le pavé de départ est un parallélogramme :



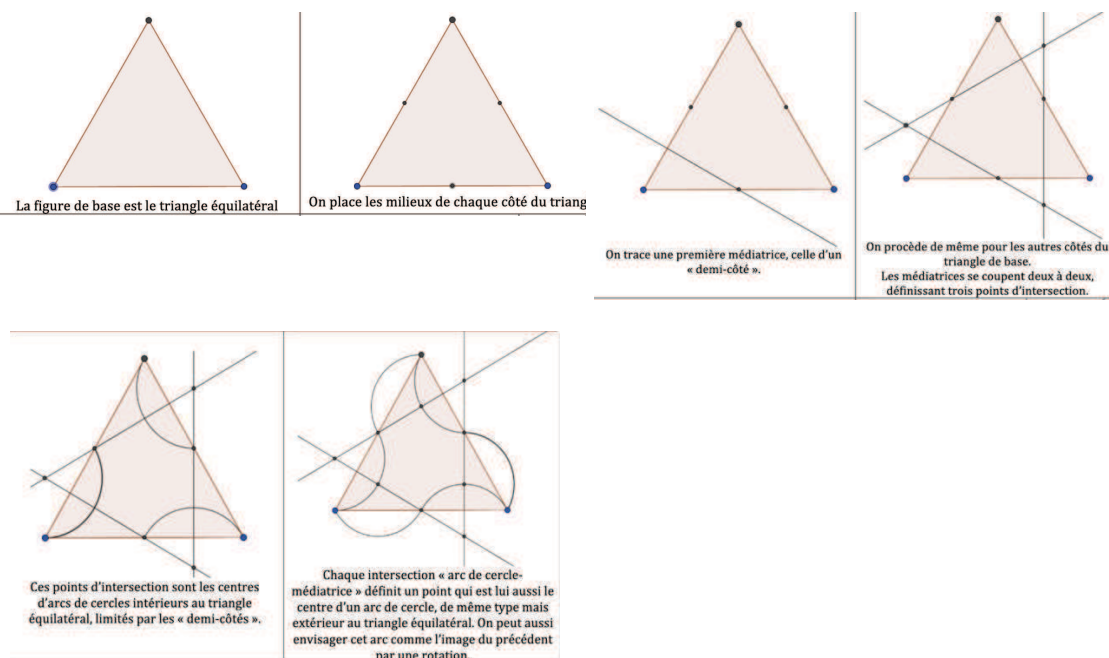
La même méthode s'applique à partir d'un triangle, puisque ceux-ci permettent de paver le plan.

Le motif des *pajaritas* est présent dans l'Alhambra de Grenade, sur les murs du patio de los Arrayanes.



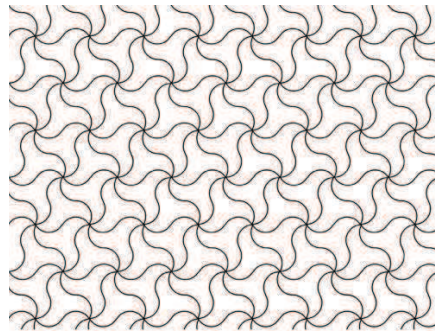
La figure de base du motif pajarita est le triangle équilatéral.

Construction d'un pajarita



Les portions de disque qui ont été ajoutées au triangle équilatéral coïncident avec celles qui lui ont été enlevées.

C'est ce principe des compensations qui permet de paver le plan avec des pajaritas.

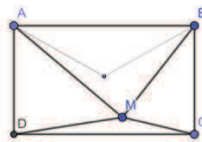


Sur le pavage ci-dessus, identifier le triangle équilatéral de base et on précisera les transformations qui ont permis de dessiner le pavage à partir du motif de base.

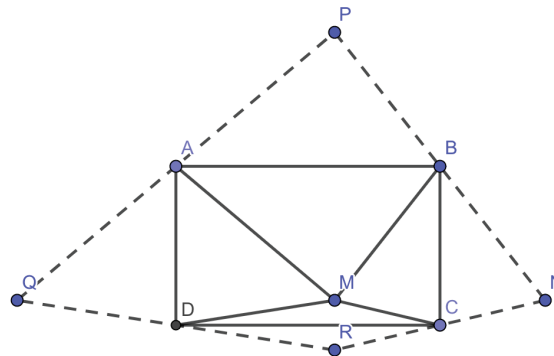
Séance 4 (au moins 45 minutes)

Construire un pavage en utilisant une enveloppe

- Prendre une enveloppe cachetée.
- Choisir un point M au verso de l'enveloppe et tracer les segments joignant M à chaque coin de l'enveloppe.



- Découper l'enveloppe le long de la ligne brisée obtenue en partant d'un coin et en ne coupant qu'une seule des deux épaisseurs.
- Mettre à plat la forme obtenue. Vérifier que c'est un quadrilatère et qu'en effectuant des symétries par rapport aux milieux de ses côtés, on peut le prolonger sans trou ni chevauchement. Le quadrilatère permet donc de paver le plan.
- Représenter sur un même dessin l'enveloppe et la forme mise à plat (qui correspond à l'accolement du recto et du verso de l'enveloppe).
- Reproduire le motif obtenu sur une feuille. On expliquera pourquoi le dépliage de l'enveloppe correspond à effectuer sur le dessin
- Démontrer que c'est un quadrilatère dont les milieux des côtés sont les points ABCD. Tracer les symétriques du quadrilatère par rapport à ces milieux. Poursuivre la construction des quadrilatères symétriques de ceux déjà tracés par rapport aux milieux de leurs côtés.

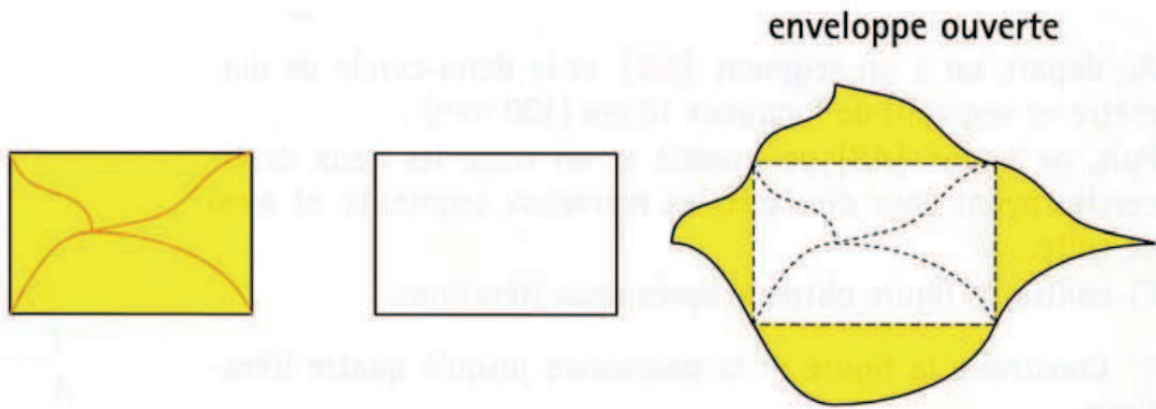


On a ainsi démontré que tout quadrilatère convexe permet de paver le plan.

Pour obtenir des figures artistiques, on peut relier le point M aux quatre coins de l'enveloppe par des lignes courbes.

Comme précédemment, on découpe le long de la ligne courbe obtenue en partant d'un coin et en ne coupant qu'une seule des deux épaisseurs.

Puis on met à plat la forme obtenue qui va servir de gabarit.



On reproduit la forme sur une feuille de papier et on cherche à paver le plan à partir du gabarit. On montrera que les quatre coins de l'enveloppe sont des centres de symétries du pavage.

C'est sur le même principe que sont construits les pavages d'Escher comme les oiseaux et les poissons.

À vous maintenant de créer votre propre pavage à la manière d'Escher !